



Quelques contributions pour la commande LPV des robots manipulateurs

Houssem Halalchi, Edouard Laroche et G. Iuliana Bara

LSIIT (UMR 7005), équipe AVR
Université de Strasbourg

Réunion de lancement du projet IDRAC
ENSPS, 19 mai 2010

Sommaire

- 1 Introduction**
 - Problématique scientifique
- 2 Approche utilisant les systèmes implicites**
 - Systèmes LPV rationnels
 - Commande des systèmes LPV implicites
 - Simulations
- 3 Approche par matrices de Lyapunov structurées**
 - Principe
 - Commande par inégalités de Lyapunov
 - Commande par “slack variables”
 - Simulations
- 4 Conclusion et perspectives**

Sommaire

- 1 Introduction**
 - Problématique scientifique
- 2 Approche utilisant les systèmes implicites**
 - Systèmes LPV rationnels
 - Commande des systèmes LPV implicites
 - Simulations
- 3 Approche par matrices de Lyapunov structurées**
 - Principe
 - Commande par inégalités de Lyapunov
 - Commande par “slack variables”
 - Simulations
- 4 Conclusion et perspectives**

Modèle dynamique

Modèle non-linéaire complet

Le modèle dynamique d'un robot manipulateur peut être décrit par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q)\dot{q} + K(q)q(t) + g(q) = \Gamma(t)$$

$M(q)$, $D(q)$ et $K(q)$ sont les matrices d'inertie, d'amortissement et de raideur

$C(q, \dot{q})$ est la matrice des effets de Coriolis et centripètes

$g(q)$ est le vecteur des couples gravitationnels

$\Gamma(t)$ est le vecteur des couples extérieurs

Utilité

Synthèse de lois de commande plus ou moins complexes

→ La plus simple est la commande PID basée sur un modèle localement linéarisé

Modélisation LPV

Modèles LPV dans l'espace d'état

Les équations d'état d'un système LPV sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = C(\rho(t))x(t) \end{cases}$$

$\rho(t)$ est un paramètre mesurable.

Obtention du modèle LPV à partir du modèle non-linéaire

Différentes possibilités :

- Linéarisation Jacobienne
 - Linéarisation basée sur la vitesse
 - Transformation d'état
 - **Substitution de fonctions**
- } systèmes "Quasi-LPV"

Commande LPV

Pourquoi la commande LPV ?

- Reformuler des non-linéarités lisses comme paramètres variants
- Lois de commande avec garantie de stabilité et de performance sur l'ensemble de l'espace de travail
- Généralisation de certains outils classiques utilisés pour les systèmes LTI

Outils de synthèse

- Inégalités matricielles linéaires (LMIs) dépendant des paramètres
- Solveurs numériques, ex : LmiLab, SeDuMi, SDPT3...

Limitations

- Complexité numérique pour une dépendance paramétrique quelconque
- Solutions parfois conservatives

Travaux effectués/en cours...

Problèmes rencontrés

- Modélisation LPV des robots manipulateurs → Systèmes LPV **rationnels**
- Conséquence : problème LMI **non-convexe**, dimension **infinie**

Solutions proposées

- Représentation LPV "**implicite**" **affine** équivalente : réduction à un nombre fini de contraintes (article de conférence dans PACAM11)
- Utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres (PDLF) ayant une **structure particulière** (article de conférence dans CIFA 2010)

Sommaire

- 1 Introduction
 - Problématique scientifique
- 2 **Approche utilisant les systèmes implicites**
 - Systèmes LPV rationnels
 - Commande des systèmes LPV implicites
 - Simulations
- 3 Approche par matrices de Lyapunov structurées
 - Principe
 - Commande par inégalités de Lyapunov
 - Commande par “slack variables”
 - Simulations
- 4 Conclusion et perspectives

Classe de systèmes

Représentation d'état

Vecteur d'état $x_r(t)$ de dimension r

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) &= A_r(\rho(t))x_r(t) + B_r(\rho(t))u(t) \\ y(t) &= C_r(\rho(t))x_r(t) \end{cases}$$

Les matrices d'état sont des fonctions **rationnelles** du vecteur de paramètres $\rho(t)$.

Commande LPV par résolution d'un nombre fini de contraintes LMI

- Échantillonnage de l'espace paramétrique
- Trouver un polytope convexe englobant de taille minimale
- Utiliser une représentation **LPV implicite affine** équivalente

Simplification de la dépendance paramétrique

- La représentation linéaire fractionnaire (LFR) est une représentation naturelle pour les systèmes LPV rationnels

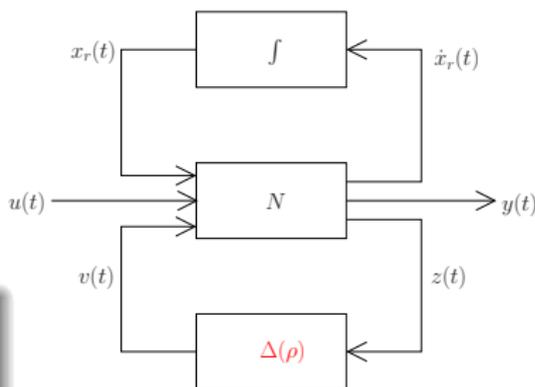
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \Delta(\rho)z(t)$$

$\Delta(\rho)$ est la matrice d'incertitude

peut être utilisée pour :

- Une commande LPV où le correcteur a aussi une structure LFR
- Obtenir un modèle LPV implicite d'ordre plus élevé :
 $E\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + Bu$ où
 $E = \text{diag}(I_n, 0_{n-r})$, $A(\rho)$ est affine et B est constant.



Commande H_∞ des systèmes LPV implicites

Problème de commande

Synthèse d'un correcteur LPV par retour de sortie qui stabilise le système et minimise la norme induite L_2 du canal de performance

Lemme borné réel généralisé (GBRL) [Masubuchi03]

Le système est stable en boucle fermée et la fonction de transfert $G(s, \rho) = C_{Cl}(sE_{Cl} - A_{Cl}(\rho))^{-1}B_{Cl}$ vérifie $\|G(s, \rho)\|_\infty < \gamma$ pour toute valeur figée du paramètre ρ si $\exists X_{Cl}(\rho)$ telle que :

$$E_{Cl}^T X_{Cl}(\rho) = X_{Cl}^T(\rho) E_{Cl} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{Cl}^T(\rho) X_{Cl}(\rho) + X_{Cl}^T(\rho) A_{Cl}(\rho) + E_{Cl}^T \dot{X}_{Cl}(\rho) & X_{Cl}^T(\rho) B_{Cl} & C_{Cl}^T \\ * & -\gamma I & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Implémentation du correcteur synthétisé

Retour à une représentation d'état LPV régulière

- Elimination des contraintes algébriques

Si $A_{22}(\rho)$ est régulière, alors le modèle implicite $(E, A(\rho), B, C)$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\rho) & A_{12}(\rho) \\ A_{21}(\rho) & A_{22}(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_r \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

est équivalent (entrée-sortie) au modèle LPV régulier

$(A_r(\rho), B_r(\rho), C_r(\rho), D_r(\rho))$ où :

$$A_r(\rho) = A_{11}(\rho) - A_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)A_{21}(\rho), \quad B_r(\rho) = B_1 - A_{12}(\rho)A_{22}^{-1}(\rho)B_2,$$

$$C_r(\rho) = C_1 - A_{22}^{-1}(\rho)A_{21}(\rho)C_2 \quad \text{et} \quad D_r(\rho) = -C_2A_{22}^{-1}(\rho)B_2$$

Bras manipulateur à 2-DDL

Hypothèses

- Robot complètement rigide
- Couples de Coriolis et centripètes compensés dans la commande

Modèles dynamique et LPV

$$M(q_2)\ddot{q} + D\dot{q} + Kq(t) = \Gamma(t)$$

La matrice d'inertie : $M(q_2) = M_0 + M_c \cos(q_2) = M_0 + M_c \Delta(\rho)$, avec $\Delta(\rho) = \rho I_2$, est affine par rapport au paramètre $\rho = \cos(q_2)$.

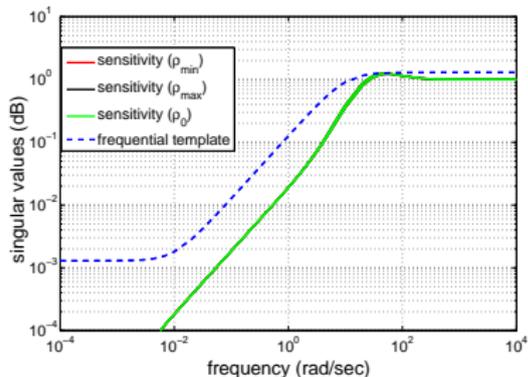
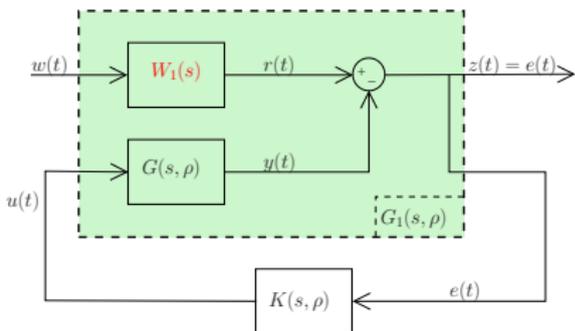
Si le vecteur d'état est $x_r(t) = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T = [q^T \ \dot{q}^T]^T$, le système a une représentation d'état **rationnelle** $(A_r(\rho), B_r(\rho), C_r(\rho))$ où :

$$A_r(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -M^{-1}(\rho)K & -M^{-1}(\rho)D \end{bmatrix}, \quad B_r(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ M^{-1}(\rho) \end{bmatrix} \text{ and } C_r(\rho) = [I_2 \ 0_{2 \times 2}]$$

Dépendance rationnelle due à l'**inversion** de la matrice d'inertie $M(\rho)$.

Commande H_∞ : méthode de sensibilité mixte

- Schéma de synthèse : modelage fréquentiel du transfert $r \rightarrow e$



Système LPV implicite augmenté

- Pondération fréquentielle :

$$W_1(s) = \frac{s+a}{K_0(s+b)} I_2$$

Exigences sur l'asservissement

En minimisant la norme induite L_2 du canal de performance $T_{W \rightarrow z}$:

- Bande passante minimum
 $w_c = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Marge de module minimum
 $M_{mod} = 0.9901$
- Erreur statique de position maximum
 $E_p = 10^{-3}$

Simulations

- Partie rigide du modèle dynamique du robot SECAFLEX [Apkarian98]

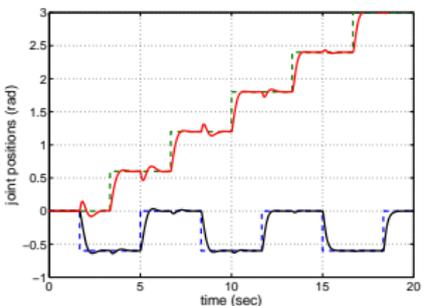
A évaluer

- Stabilité et performances sur l'ensemble de l'espace de travail
- Découplage suffisant des deux articulations

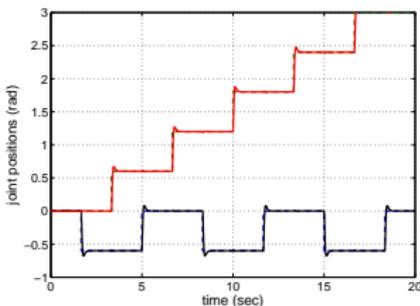
Signaux de référence choisis

- q_2^* est une série de créneaux progressifs parcourant l'intervalle $[0, \pi]$
- q_1^* est un signal carré en quadrature de phase avec q_2^*

- Comparaison avec un correcteur LTI **proportionnel et dérivé** décentralisé



(a)



(b)

Sommaire

- 1 **Introduction**
 - Problématique scientifique
- 2 **Approche utilisant les systèmes implicites**
 - Systèmes LPV rationnels
 - Commande des systèmes LPV implicites
 - Simulations
- 3 **Approche par matrices de Lyapunov structurées**
 - Principe
 - Commande par inégalités de Lyapunov
 - Commande par “slack variables”
 - Simulations
- 4 **Conclusion et perspectives**

Principe

Principe

- Éviter l'inversion de la matrice d'inertie dans les conditions de synthèse
- Inclure les non-linéarités de Coriolis dans le modèle LPV de synthèse (pas de compensation dans la commande)

Modèle dynamique

$$M(q_2)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + Kq(t) = \Gamma(t)$$

Ce qui donne, au niveau de l'articulation k :

$$\sum_j m_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + f_k\dot{q}_k + k_k q_k = \Gamma_k$$

$$\text{où } c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)$$

Pour l'exemple du bras à 2-DDL, modèle LPV à **3 paramètres** : $\rho_1 = \cos(q_2)$,
 $\rho_2 = \dot{q}_2 \sin(q_2)$ et $\rho_3 = \dot{q}_1 \sin(q_2)$.

Remarque : $\dot{\rho}_1 = -\rho_2$. Cette relation peut être exploitée pour réduire le nombre de LMIs de synthèse → moins de sommets.

Modèle LPV et matrices de Lyapunov structurées

Modèle LPV

Le robot horizontal à 2-DDL peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

où $A(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)A_1(\rho)$, $B(\rho(t)) = M_1^{-1}(\rho_1)B_1(\rho)$ et $C = [I_2 \quad 0_2]$, avec

$M_1(\rho_1) = \text{diag}(I_2, M(\rho_1))$, $A_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_e & -D - S(\rho_2, \rho_3) \end{bmatrix}$, $B_1(\rho) = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ et

$S(\rho_2, \rho_3) = \begin{bmatrix} -m_{11c}\rho_2 & -\frac{1}{2}m_{11c}\rho_2 \\ \frac{1}{2}m_{11c}\rho_3 & 0 \end{bmatrix}$. Modèle LPV rationnel de structure particulière

→ peut être exploitée afin d'obtenir un nombre fini de LMIs.

Exemple : Inégalité de Lyapunov

$$P(\rho)A(\rho) + A^T(\rho)P(\rho) + \dot{P}(\rho) < 0, \forall (\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$$

Prendre $P(\rho) = P_1(\rho)M_1(\rho)$ simplifie la dépendance rationnelle de la LMI.

$$P_1(\rho)A_1(\rho) + A_1^T(\rho)P_1(\rho) + \dot{P}_1(\rho)M_1(\rho) + P_1(\rho)\dot{M}_1(\rho) < 0$$

→ **pas d'inversion** de $M_1(\rho)$! dépendance paramétrique au plus polynômiale.

Commande par inégalités de Lyapunov

Retour d'état stabilisant

$A_{BF}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$: matrice d'état de la boucle fermée.

- Le système asservi est stable si $\exists Q(\rho) = Q^T(\rho) > 0, \exists R(\rho)$ tels que :
 $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}},$

$$M_1(\rho)Q(\rho) = Q(\rho)M_1(\rho)$$

$$\text{He}\{A_1(\rho)Q(\rho) + B_1R^T(\rho)\} - \dot{Q}(\rho)M_1(\rho) + Q(\rho)\dot{M}_1(\rho) < 0$$

- Le correcteur par retour d'état LPV est donné par :
 $K(\rho) = R^T(\rho)Q^{-1}(\rho)$

Inconvénient

- Contraintes de type égalité : satisfaction numérique difficile

Avantage

- LMIs de taille compacte

Commande par "slack variables"

Commande par slack variables

Contexte

- Nouvelles conditions de stabilité dites LMI étendues [Apkarian01].
- Système stable si : $\exists P(\rho) = P^T(\rho)$ (matrice de Lyapunov) et $\exists V(\rho)$ (variable faible) tels que :

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V(\rho)\} & V^T(\rho)A(\rho) + P(\rho) & V^T(\rho) \\ A^T(\rho)V(\rho) + P(\rho) & -P(\rho) + \dot{P}(\rho) & 0 \\ V(\rho) & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0$$

Retour d'état stabilisant

$A_{BF}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho) = M_1^{-1}(\rho)(A_1(\rho) + B_1K(\rho))$ et $V(\rho) = M_1(\rho)V_1$.

- Le système asservi est stable si $\exists \Gamma(\rho) = \Gamma^T(\rho)$, $\exists R(\rho)$ et $\exists V_1$ tels que : $\forall(\rho, \dot{\rho}) \in E_\rho \times E_{\dot{\rho}}$,

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{V_1^{-T}M_1(\rho)\} & A_1(\rho)V_1^{-1} + B_1R(\rho) + \Gamma(\rho) & V_1^{-T}M_1(\rho) \\ * & -\Gamma(\rho) + \dot{\Gamma}(\rho) & 0 \\ * & * & -\Gamma(\rho) \end{bmatrix} < 0$$

- Le correcteur par retour d'état est alors donné par : $K(\rho) = V_1R(\rho)$.

Commande par "slack variables"

Commande par retour de sortie dynamique

- Correcteur dynamique $K(s, \rho) : (A_K(\rho), B_K(\rho), C_K(\rho), 0)$: problème de synthèse plus complexe.
- Inégalités matricielles bi-linéaires (BMIs) → obtention de LMIs à l'aide de transformations linéarisantes (projections) [Gahinet96].

Principal résultat (soumis à IFAC-SSSC 2010)

Si la LMI suivante a une solution $\Phi = \{\hat{V}_{11}, \hat{W}_{11}, \hat{A}_K, \hat{B}_K, \hat{C}_K, \hat{U}(\rho), \hat{X}(\rho)\}$:

$$\begin{bmatrix} -\text{He}\{M_1(\rho)\hat{V}_{11}\} & (*) & (*) & (*) \\ -(\hat{U}(\rho) + M_1(\rho)) & -\text{He}\{M_1(\rho)\hat{W}_{11}\} & (*) & (*) \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \hat{X}(\rho) & \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \hat{X}(\rho) & -\hat{X}(\rho) & (*) \\ M_1(\rho)\hat{V}_{11} & M_1(\rho) & 0 & -\hat{X}(\rho) \\ \hat{U}(\rho) & \hat{W}_{11}^T M_1(\rho) & & \end{bmatrix} < 0$$

alors le système asservi est stable et le correcteur LPV est donné par :

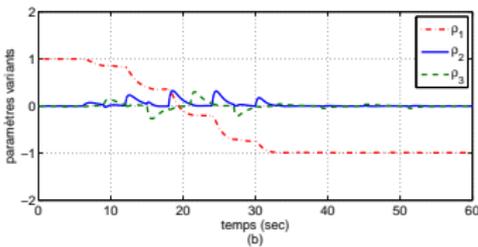
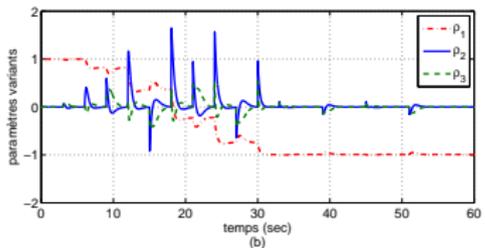
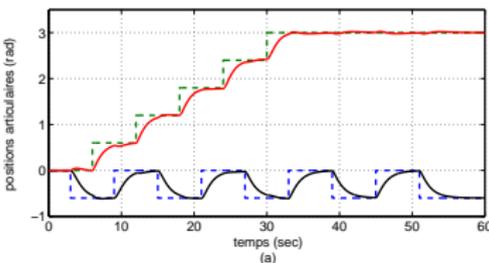
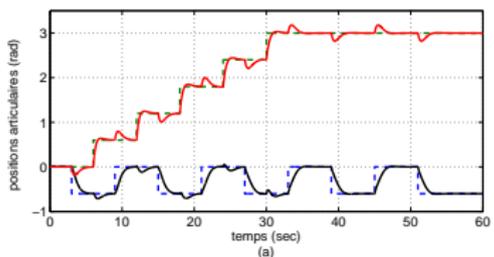
$$B_K(\rho) = W_{21}^{-T}(\rho)\hat{B}_K; \quad C_K(\rho) = \hat{C}_K V_{21}^{-1}(\rho);$$

$$A_K(\rho) = W_{21}^{-T}(\rho)[\hat{A}_K - \hat{W}_{11}^T A_1(\rho) V_{11} - W_{21}^T B_K(\rho) C V_{11} - \hat{W}_{11}^T B_1 C_K(\rho) V_{21}(\rho)] V_{21}^{-1}(\rho).$$

avec : $\alpha_1 = A_1(\rho)\hat{V}_{11} + B_1\hat{C}_K M_1(\rho)$, $\alpha_2 = A_1(\rho)$, $\alpha_3 = \hat{A}_K M_1(\rho)$, $\alpha_4 = \hat{W}_{11}^T A_1(\rho) + \hat{B}_K C$.

Simulations

- Comparaison des réponses temporelles : à gauche avec des inégalités de Lyapunov, à droite avec des conditions LMIs augmentées (slack variables)



Sommaire

- 1 **Introduction**
 - Problématique scientifique
- 2 **Approche utilisant les systèmes implicites**
 - Systèmes LPV rationnels
 - Commande des systèmes LPV implicites
 - Simulations
- 3 **Approche par matrices de Lyapunov structurées**
 - Principe
 - Commande par inégalités de Lyapunov
 - Commande par “slack variables”
 - Simulations
- 4 **Conclusion et perspectives**

Conclusion

- Commande LPV en position dans l'espace articulaire
- Correcteurs par retour de sortie : possibilité de commander des robots flexibles où l'état n'est pas complètement mesurable.
- Approche quasi-LPV pour la commande de systèmes ayant des non-linéarités lisses.

Perspectives

- Commande LPV de manipulateurs flexibles : flexibilité d'articulation ou de segment.
- Commande LPV dans l'espace opérationnel cartésien.
- Commande de structures plus complexes : plus de degrés de liberté, robots parallèles, robots à câbles...

Merci